Teoria dystrybucji

Zadanie 1. Wyznaczyć pochodną dystrybucyjną funkcji

$$f_1(x) = x^2,$$
$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{(funkcja Heaviside'a)}$$
$$f_3(x) = \ln|x|.$$

Zadanie 2. Sprawdzić, że wzory

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \left\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x+i\varepsilon}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

zadają poprawnie zdefiniowane dystrybucje. Wyprowadzić wzór Sochockiego

$$\frac{1}{x+i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + \pi i \delta_0.$$

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus 0)$, $f \in L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$ oraz $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus 0)$, to ∇f jest dystrybucyjnym gradientem f na $\mathbb{R}^n$.
Wskazówka. Domnożyć funkcję testową przez funkcję wycinającą $\eta_r(x) = \eta(x/r)$, gdzie $\eta \in C_c^\infty(\mathbf{B}_2)$, $\eta \equiv 1$ na $\mathbf{B}_1$.

Zadanie 4. (podstawowy lemat rachunku wariacyjnego)
Jeśli funkcja $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ spełnia

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{dla każdego } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

to $f \equiv 0$. *Wskazówka.* Rozważyć ciąg $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ przybliżający funkcję $\operatorname{sgn} f$ w odpowiednim sensie.

Uwaga. Powyższe zadanie pokazuje, że funkcja $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez regularną dystrybucję $\varphi \mapsto \int f\varphi$.

Zadanie 5. Sprawdzić, że delta Diraca nie jest regularną dystrybucją, tzn. nie istnieje funkcja $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ spełniająca

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \quad \text{dla } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Zadanie 6. Obliczyć dywergencję dystrybucyjną pola wektorowego $V \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ zadanego przez

$$V(x,y) = (\operatorname{sgn} x, \operatorname{sgn} y) = \begin{cases} (1,1) & x>0,\ y>0 \\ (-1,1) & x<0,\ y>0 \\ (-1,-1) & x<0,\ y<0 \\ (1,-1) & x>0,\ y<0 \end{cases}$$

Uwaga. Przez dywergencję rozumiemy sumę dystrybucji $\partial_x V^1$ i $\partial_y V^2$, lub równoważnie dystrybucję określoną przez

$$\langle \operatorname{div} V, \varphi \rangle := -\int_{\mathbb{R}^2} V(x,y) \cdot \nabla\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Zadanie 7. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą, a μ miarą Radona, dla której f jest dystrybuantą, tzn. $\mu((c,d]) = f(d^+) - f(c^+)$ (nazywamy ją miarą *Lebesgue'a-Stieltjesa*). Wykazać, że μ jest pochodną dystrybucyjną f.

Zadanie 8. Wykazać, że z dokładnością do równości p.w. prawdziwa jest następująca charakteryzacja: $f \in BV((a,b))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in L^1((a,b))$ oraz pochodna dystrybucyjna f jest wyznaczona przez pewną skończoną miarę na (a,b).

Zadanie 9. Splot dystrybucji $w \in \mathcal{D}'$ z funkcją testową $f \in \mathcal{D}$ definiujemy jako funkcję

$$(f * w)(x) = \langle w, \gamma_x f \rangle, \quad \text{gdzie} \quad \gamma_x f(y) = f(x-y).$$

Sprawdzić, że jest to funkcja gładka i $\partial^\alpha(f*w) = (\partial^\alpha f) * w = f * (\partial^\alpha w)$.

Zadanie 10. (rozwiązanie fundamentalne)
Dany jest liniowy operator różniczkowy o stałych współczynnikach $P(\partial) = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha$. Wykazać, że jeśli równanie $P(\partial)w = \delta_0$ posiada dystrybucyjne rozwiązanie $w \in \mathcal{D}'$, to możemy rozwiązywać równania jawnym wzorem:

$$v \in \mathcal{D} \quad \Longrightarrow \quad u = v * w \text{ rozwiązuje } P(\partial)u = v \text{ w klasycznym sensie.}$$

Zadanie 11. Znaleźć rozwiązanie fundamentalne dla operatorów $\partial_x \partial_y$ oraz Δ w $\mathbb{R}^2$.